L'Actualité économique

Acquisition d'information dans un modèle intertemporel en temps continu
Information acquisition in an intertemporal continuous time model

Jérôme B. Detemple et Richard E. Kihlstrom

Volume 63, numéro 2-3, juin–septembre 1987

Incertain et information

URI : https://id.erudit.org/iderudit/601413ar
DOI : https://doi.org/10.7202/601413ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)
1710-3991 (numérique)

Résumé de l'article

Cet article examine la demande d'information et la valeur de l'information dans un modèle intertemporel en temps continu. Le modèle étudié est un modèle à information incomplète où la technologie d'information est contrôlée par l'investisseur moyennant un coût. Le mécanisme bayésien continu de révision des croyances produit, pour cette structure, une distribution postérieure gaussienne à tout point du temps. Le contrôle de la technologie d'information est équivalent au contrôle de l'estimateur de la position de la variable d'état (espérance conditionnelle) ainsi que de la précision de cet estimateur (variance conditionnelle). La demande d'information, dans notre modèle, se compose de deux termes, qui résultent du conflit entre deux objets d'apprentissage. Sous l'hypothèse d'une offre de précision stochastique et inélastique, le prix d'équilibre de l'information est dérivé et sa structure analysée.

L'Actualité Économique. Revue d'analyse économique, vol. 63, n° 2-3, juin-septembre 1987

ACQUISITION D'INFORMATION DANS UN MODÈLE INTERTEMPOREL EN TEMPS CONTINU

Jérôme B. DETEMPLE*
Columbia University
et
Richard E. KIHLSTROM**
University of Pennsylvania

Cet article examine la demande d'information et la valeur de l'information dans un modèle intertemporel en temps continu. Le modèle étudié est un modèle à information incomplète où la technologie d'information est contrôlée par l'investisseur moyennant un coût. Le mécanisme bayésien continu de révision des croyances produit, pour cette structure, une distribution postérieure gaussienne à tout point du temps. Le contrôle de la technologie d'information est équivalent au contrôle de l'estimateur de la position de la variable d'état (espérance conditionnelle) ainsi que de la précision de cet estimateur (variance conditionnelle). La demande d'information, dans notre modèle, se compose de deux termes, qui résultent du conflit entre deux objets d'apprentissage. Sous l'hypothèse d'une offre de précision stochastique et inélastique, le prix d'équilibre de l'information est dérivé et sa structure analysée.

Information acquisition in an intertemporal continuous time model. — In this paper we examine the demand for information and the value of information in an intertemporal continuous time model. The model analyzed is a model with incomplete information where the information technology is controlled by the investor at a cost. The continuous bayesian updating of beliefs yields, for the information structure postulated, a posterior conditional distribution that is Gaussian at any point in time. The control of the information technology is equivalent to the control of the estimator of the state variable (conditional mean) and of the precision of this estimator (conditional variance). The demand for information is composed of two terms which result from the conflict between two subjects of learning. Under an assumption on the supply of precision, we derive and analyze the equilibrium price of information.

---

*Professeur associé de finance.
**Professeur d'économie et de finance.

1. INTRODUCTION

Cet article examine la demande d'information dans un modèle intertemporel d'allocation de ressources en temps continu. Une caractéristique importante de la plupart des décisions prises par un agent économique est la possibilité de réviser les choix antérieurs. En particulier, cette faculté de révision s'applique aux décisions à caractère informatif. La possibilité de modifier ou bien d'augmenter le nombre de sources d'information au vu des informations obtenues, fait partie intégrante des décisions quotidiennes auxquelles sont confrontés firmes et investisseurs. Dans la mesure où ces décisions affectent les activités traditionnellement étudiées des agents économiques (consommation, investissement, etc.), il nous paraît important de développer une théorie de l'allocation intertemporelle des ressources, qui tienne explicitement compte des décisions à caractère informatif.

Le modèle développé dans cet article se situe dans la lignée des modèles de consommation-portefeuille en temps continu sous information incomplète (Detemple (1986(a) et (b)), Dothan et Feldman (1986), Feldman (1986(a) et (b)), Gennotte (1986)). Il généralise les travaux précédents au cas où la qualité de l'information obtenue est contrôlée par l'investisseur. La structure du modèle est la suivante. Un investisseur unique alloue sa richesse entre consommation, investissement dans des technologies de production, et investissement dans une technologie d'information. La production technologique, dans ce cadre d'analyse, dépend d'un paramètre non observé (θ_t), qui évolue stochastiquement au cours du temps. Ce paramètre (variable d'état) peut être interprété, par exemple, comme les conditions climatiques ou l'état du sol dans le cas d'une technologie de production agricole, ou bien encore comme l'état d'une machine dans le cas d'une technologie de production industrielle. Le paramètre d'état technologique n'est pas observé directement, mais peut être « estimé » sur la base des observations transmises par des technologies d'information. L'évolution stochastique de ce paramètre ($d\theta_t$) dépend de la position présente du paramètre (θ_t) ainsi que de deux chocs aléatoires non observés ($dz_1(t)$ et $dz_2(t)$). L'information dans ce modèle provient de deux sources. La première source d'information est la production technologique. Étant donné notre hypothèse de rendements d'échelle stochastiques constants, la « quantité » d'information collectée par ce biais n'est pas controlée par l'investisseur. Les rendements technologiques, dans notre modèle, sont générés par une combinaison linéaire de la position présente de la variable d'état (θ_t) et de la première source de bruit ($dz_1(t)$). L'observation de ces rendements produit donc une information simultanée sur ces deux éléments (θ_t et $dz_1(t)$). La seconde source d'information est une technologie d'information pure, contrôlée par l'investisseur. L'observation transmise par cette technologie ($d\varepsilon_t$) dépend de la position antérieure de la variable d'état (θ_t) et de la réalisation du second choc aléatoire non observé ($dz_2(t)$). L'information transmise est donc incomplète. L'investisseur peut ajuster, par le choix d'un paramètre, la combinaison linéaire spécifique observée. La nature du contrôle concerne donc la valeur relative de l'information transmise par l'observation, $d\varepsilon_t$, sur les réalisations des deux éléments θ_t et $dz_2(t)$.

Moyennant un coût (désutilité de l'effort investi, ou bien diminution des ressources financières), l'amplitude du bruit dans l'information transmise sur la variable θ_t peut être réduite. Cette faculté de contrôle de l'information transmise distingue notre étude des analyses antérieures en temps continu sous information incomplète. L'aspect dynamique qui est introduit ici, en outre, généralise les modèles statiques d'acquisition d'information (Kihlstrom (1974(a) et (b), (1976)), Verrecchia (1982), Freixas et Kihlstrom (1984), Admati et Pfleiderer (1984), Losq et Sobti (1985), Danthine et Magill (1985), Diamond (1985)). Notre étude se distingue également des modèles dynamiques d'apprentissage par expérimentation (Grossman, Kihlstrom et Mirman (1977), Kihlstrom, Mirman et Postlewaite (1984)), dans lesquels une décision de consommation produit simultanément de l'information. Par opposition, dans cet article, outre la multiplicité des décisions prises par l'agent, le choix d'investissement dans la technologie d'information est distinct des autres décisions (consommation et investissement financier ou dans les technologies de production).

L'investisseur dans ce contexte procède à une revision bayésienne continue de la distribution conditionnelle de la variable d'état non observée. Dans les modèles précédents en temps continu et à information incomplète, la structure du signal est spécifiée de façon exogène. La procédure de révision bayésienne de la distribution postérieure est donc une procédure purement mécanique. Dans cet article, la faculté de contrôle de l'information transmise permet à l'investisseur d'influencer le mécanisme de révision et donc de « guider » la distribution postérieure. Cette capacité de contrôle des croyances introduit des difficultés supplémentaires dans l'analyse. En effet, même lorsque la structure jointe des processus suivis par la variable d'état et des signaux est markovienne pour un contrôle donné, le choix optimal peut théoriquement dépendre de l'historique des observations et donc détruire le caractère markovien de l'économie. Si cela était le cas, les résultats relatifs à la formulation de Kalman-Bucy du problème de filtrage ou à ses dérivées (*cf.* Liptser et Shiryayev (1977)), ne s'appliqueraient pas directement à notre problème.

Afin d'obtenir des résultats concrets nous restreignons la classe des contrôles admissibles à celle des contrôles markoviens, qui dépendent de la richesse de l'investisseur, ainsi que de l'espérance et de la variance conditionnelles.[1] Sous cette hypothèse la distribution conditionnelle de la variable d'état étant donné les observations passées est normale et est complètement déterminée par deux paramètres : l'espérance et la variance. Le système formé par ces deux statistiques et la richesse forme un processus de diffusion joint et caractérise complètement l'évolution de la distribution conditionnelle. À la différence des structures à

1. Il est raisonnable de conjecturer que les politiques optimales appartiennent à cette classe, même si l'on relâche cette condition. La base intuitive de cette conjecture est extrêmement forte au vu de la théorie statistique bayesienne et de la théorie de programmation dynamique en temps discret. Une démonstration formelle de ce résultat se situe au delà du domaine de cet article.

information incomplète non contrôlée, étudiées auparavant, l'espérance conditionnelle seule ne constitue pas, dans notre analyse, une statistique suffisante pour la distribution postérieure. En effet alors que la variance conditionnelle est une fonction déterministe du temps en l'absence de contrôle, la possibilité de contrôle rend cette variable stochastique. Plus précisément, la variance conditionnelle γ suit un processus localement déterministe de la forme $d\gamma = \mu_\gamma dt$. Le changement instantanné μ_γ, cependant, dépend par l'intermédiaire du contrôle, de la richesse et de l'espérance conditionnelle qui toutes deux suivent des processus stochastiques.

Sous l'hypothèse de contrôles markoviens décrite ci-dessus, nous montrons que le programme initial de l'investisseur sous information incomplète se transforme en un programme sous information complète où l'état du système est décrit par la richesse, l'espérance et la variance conditionnelles. Dans la mesure où ce triplet suit un processus de diffusion joint, des méthodes classiques de programmation dynamique peuvent être appliquées à l'analyse du problème d'allocation des ressources de l'investisseur.

La demande d'information dans ce contexte se compose de deux termes. Ces deux termes, intuitivement, résultent du conflit entre les deux objets d'apprentissage (θ_t et $dz_2(t)$).

(i) En premier lieu, l'investisseur, par le choix de la précision du signal $d\varepsilon_t$, effectivement contrôle la révision de l'estimateur de la position de la variable d'état. La première composante de la demande d'information est donc une demande pour motif de révision de la moyenne conditionnelle.

(ii) En second lieu le contrôle du signal permet également de contrôler l'information obtenue, quant à la réalisation du second choc aléatoire non observé ($dz_2(t)$). La seconde composante est donc une demande d'information quant à ce choc aléatoire non observé. La demande totale d'information est une fonction décroissante, qui dépend de la somme de ces deux composantes.

En spécifiant une offre exogène de précision, stochastique et inélastique, nous obtenons également le prix d'équilibre de la précision. À l'équilibre ce prix est directement proportionnel à l'effet marginal de la précision sur la variance locale de l'estimateur (espérance conditionnelle). Dans la mesure où ce prix est exprimé en fonction des dérivées partielles de la fonction valeur du programme de l'investisseur, des effets indirects existent également.

La structure de l'article est la suivante. Dans la seconde section, nous présentons les hypothèses du modèle. La troisième section examine le problème d'inférence. Finalement, dans la dernière section nous étudions la structure de la demande d'information et celle du prix d'équilibre de l'information.

II) L'ÉCONOMIE

Dans cette section, nous décrivons la structure du modèle. Le cadre d'analyse est un modèle d'équilibre général avec un agent représentatif, similaire au modèle de Cox, Ingersoll et Ross (1985). L'agent décideur a pour objectif d'allouer sa richesse W_t entre consommation, c_t, investissement dans N technologies de production risquées, et investissement dans une technologie d'information. Les technologies de production sont à rendements d'échelle stochastiques constants et produisent toutes un bien unique. Soit w_t le vecteur (de dimension N) de proportions de richesse investies dans ces technologies. L'investissement total dans le circuit de production est donné par $\underline{1}' w_t W_t$, où $\underline{1}$ représente le vecteur unitaire de dimension N et le symbole $'$ représente l'opération de transposition. La production satisfait l'équation différentielle stochastique spécifiée ci-dessous dans l'hypothèse II.1. La moyenne instantanée de ce processus stochastique dépend linéairement d'une variable d'état θ_t non observée. Cette variable d'état peut être interprétée comme un paramètre technologique (progrès technique, conditions climatiques, activités de recherche, etc.) qui affecte la production. La variable θ_t évolue stochastiquement selon le processus décrit dans l'hypothèse II.2. L'investisseur dans cette économie n'observe pas θ_t directement, mais « estime » la position de θ_t en utilisant l'information véhiculée par des quantités observables.

La structure de l'économie à ce point correspond au cadre d'analyse des modèles à information incomplète (Detemple (1986(a) et (b)), Dothan et Feldman (1986), Feldman (1986(a) et (b)) et Gennotte (1986)). Notre étude diffère cependant des travaux précédents, dans la mesure où l'information acquise est endogène. Spécifiquement, dans ce modèle, nous supposons que l'information provient de deux sources : (i) le vecteur de production des diverses technologies, et (ii) un signal informatif et contrôlé, distinct des technologies. La première source d'information (le vecteur de production), manifestement, joue un rôle double dans notre analyse. D'une part les technologies constituent des actifs d'investissement dans la mesure où leur usage permet le transfert intertemporel du capital (richesse). Mais d'autre part, elles sont source d'information puisque la production dépend de la variable d'état θ_t non observée. L'information transmise par les technologies est indépendante du montant investi (sous l'hypothèse que les technologies sont actives) puisque la production est à rendements d'échelle constants. La seconde source d'information est un pur processus d'information, qui satisfait l'équation différentielle stochastique spécifiée dans l'hypothèse II.3. Cette variable d'information, ε_t, peut être interprétée comme le résultat d'une analyse des conditions de production (par exemple étude météorologique ou agronomique si θ_t représente les conditions climatiques ou l'état du sol, ou encore étude technique afin de déterminer la valeur des paramètres qui affectent la production d'une machine, etc.). Ce signal est contrôlé par l'usager, dans la mesure où il peut choisir, moyennant un coût, la précision n_t de cette information (contrôle de la « qualité » de l'analyse des conditions de production). La structure de cette décision est discutée de manière plus approfondie ultérieurement.

L'agent dans cette économie choisit une stratégie de consommation et d'investissement (dans les technologies de production et dans l'information) de manière à maximiser l'espérance de son utilité à vie. La classe des politiques admissibles est un ensemble de contrôles non anticipatifs, qui vérifient les conditions de non-négativité $c_t \geqq 0$, $w_t \geqq 0$, et $n_t > 0$.[2] Les hypothèses suivantes sont utilisées.

Hypothèse II.1. (Technologies) : Les technologies sont à rendements d'échelle stochastiques constants et satisfont l'équation différentielle stochastique,

$$d\eta_t = I_\eta\ [\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\theta_t]dt + I_\eta G(t)dz_1(t) \tag{2.1}$$

où I_η est une matrice diagonale de dimension $N \times N$ avec le vecteur d'investissements η_t sur la diagonale et zéro ailleurs, θ_t est la variable (unidimensionnelle) d'état non observée, $\{z_1(t) : 0 \leqq t \leqq T\}$ est un processus brownien standard non observé, et $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$ et $G(t)$ sont des vecteurs de fonctions déterministes de dimensions $N \times 1$. Le vecteur de rendements instantanés $I_\eta^{-1}\ d\eta_t$ a donc pour vecteur moyen $\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\theta_t$ et pour matrice de variance-covariance locale, $G(t)G'(t)$.

Hypothèse II.2. (Variable d'état) : La variable d'état θ_t évolue stochastiquement et satisfait,

$$d\theta_t = [a_0(t) + a_1(t)\theta_t]\ dt + b_1(t)dz_1(t) + b_2(t)dz_2(t) \tag{2.2}$$

où $\{z_2(t) : 0 \leqq t \leqq T\}$ est un processus brownien standard non observé, et indépendant du processus $\{z_1(t) : 0 \leqq t \leqq T\}$. L'espérance et la variance locale de θ_t sont respectivement données par $a_0(t) + a_1(t)\theta_t$ et $b_1^2(t) + b_2^2(t)$. Le processus θ_t n'est pas observé par l'agent. Celui-ci possède des croyances a priori quant à la position initiale θ_0. Nous supposons que cette distribution conditionnelle a priori est normale avec moyenne m_0 et variance σ_0^2.

Hypothèse II.3. (Information) : L'agent représentatif connait la structure de l'économie (les paramètres des processus de production et des processus de choc). Il observe les réalisations des processus de production $\{\eta_t : 0 \leqq t \leqq T\}$ ainsi que les réalisations du signal informatif $\{\varepsilon_t : 0 \leqq t \leqq T\}$ satisfaisant l'équation différentielle stochastique suivante,

$$d\varepsilon_t = [A_0(t) + A_1(t)\theta_t]dt + \frac{1}{\sqrt{n_t}}\ B(t)dz_2(t) \tag{2.3}$$

où $A_0\ (t)$, $A_1\ (t)$ et $B(t)$ sont des fonctions déterministes et n_t représente un contrôle exercé par l'investisseur. L'information collectée au temps t est donc donnée par la sigma-algèbre $F_t^{\eta,\varepsilon}$ générée par la trajectoire $\{(\eta_s, \varepsilon_s) : 0 \leqq s \leqq t\}$.

Interprétation: L'investisseur dans ce contexte économique n'observe pas les réalisations des chocs technologiques, c.a.d. les réalisations du processus $\{\theta_t : 0 \leqq t \leqq T\}$. Il prend ses décisions au temps t sur la base de l'information collectée

2. Une politique de contrôle est dite non anticipative lorsqu'elle ne dépend que de l'information accumulée jusqu'au point de décision. Soit $F_t^{\eta,\varepsilon} \equiv \sigma\text{-}\{(\eta_s, \varepsilon_s) :\ 0 \leqq s \leqq t\}$ la sigma-algèbre générée par les technologies de production (η) et la technologie d'information (ε). La stratégie $x \equiv \{x_s : 0 \leqq s \leqq \mathrm{T}\}$ est non anticipative si x_s est $F_s^{\eta,\varepsilon}$-mesurable pour tout $s \in [0,T]$.

à ce point, $F_t^{\eta,\varepsilon}$. Afin de comprendre la nature du contrôle (n_t) exercé par l'investisseur, notons tout d'abord que l'évolution de la variable d'état ($d\theta_t$), donnée par l'équation (2.2), est une combinaison linéaire de trois facteurs non observés θ_t, $dz_1(t)$ et $dz_2(t)$. La première source d'information est le vecteur des rendements des technologies de production (équation (2.1)), qui sont générés par une combinaison linéaire de θ_t et de $dz_1(t)$. L'observation de ces rendements produit donc de l'information sur une somme pondérée de ces deux composantes.

La seconde source d'information est le signal $\{\varepsilon_t : 0 \leqq t \leqq T\}$ donné par l'équation (2.3). Ce signal peut être interprété comme le résultat d'un processus continu de contrôle de l'outil de production, qui a pour but de déterminer l'état des technologies (la valeur de la variable d'état). Ce signal est généré par une combinaison linéaire de θ_t et de $dz_2(t)$. La faculté de contrôle du paramètre n_t permet au décideur d'ajuster l'information collectée. Lorsque n_t est grand ($n_t \to \infty$), l'observation $d\varepsilon_t \equiv \varepsilon_{t+dt} - \varepsilon_t$, au temps $t+dt$, révèle la position exacte de θ_t à un incrément de temps auparavant. Dans ce cas l'information sur $dz_2(t)$ est nulle. De plus, les rendements technologiques $I_\eta^{-1} d\eta_t$ dévoilent alors la valeur de $dz_1(t)$ (puisque θ_t est connu). Au contraire, lorsque n_t est petit ($n_t \to 0$) l'effet de $dz_2(t)$ sur la réalisation $d\varepsilon_t$ domine. L'observation $d\varepsilon_t$ révèle alors $dz_2(t)$, mais demeure non informative quant à la valeur de θ_t.

Le choix optimal du paramètre n_t entraîne donc la prise en compte de la valeur de l'information sur la paire (θ_t, $dz_1(t)$) relative à celle sur $dz_2(t)$, ainsi que du coût de l'information (Hypothèse II.4 ci-dessous). Lorsque le coefficient b_2 dans l'équation (2.2) est petit, la solution optimale dicte, intuitivement, un choix de n_t large. En effet, à la limite, lorsque b_2 est nul, l'agent a intérêt à extraire le maximum d'information quant à θ_t. Si le contrôle était gratuit il devrait alors choisir une information complète quant à la position de θ_t (*cf.* Grossman, Kihlstrom et Mirman (1977), théorème 3). Lorsque b_2 diffère de zéro (en particulier lorsque $|b_2|$ est large relativement aux autres coefficients du modèle), le balancement entre les deux objets d'apprentissage (dz_2 (t) et (θ_t, $dz_1(t)$)) induit un choix optimal où l'information quant à θ_t reste incomplète.

Hypothèse II.4. (Coût de l'information) : La précision du signal ε_t (équation (2.3)) est controlée par le choix du paramètre n_t. Le flux instantané de ressources investies dans cette occupation est une fonction $k(n_t)$ strictement croissante et strictement convexe par rapport à n_t.[3]

Hypothèse II.5. (Marchés financiers) : Un titre obligataire non risqué constitue l'unique instrument financier dans cette économie. Le prix du titre, B_t, satisfait l'équation, $dB_t = B_t r dt$, où r représente le taux d'intérêt instantané sans risque. Ce taux est déterminé de manière endogène.

3. Alternativement, le coût d'un accroissement de la précision du système de contrôle peut être mesuré en terme de perte d'utilité, associée avec l'intensité de l'effort à fournir pour augmenter la précision. Ce phénomène peut être représenté par une fonction d'utilité instantanée de la forme $u(c_t,t)$ - $v(n_t,t)$ où la fonction $v(\cdot)$ est strictement croissante et convexe par rapport à l'effort n_t.

Hypothèse II.6. (Préférences) : L'agent représentatif choisit une stratégie de politiques admissibles $\{(c_t, w_t, n_t) : 0 \leqq t \leqq T\}$ de façon à maximiser son espérance d'utilité à vie, $E[\int_0^T u[c_s, s]ds]$ où l'opérateur $E[\cdot]$ représente l'opérateur d'espérance prise par rapport à la mesure de probabilité sous-jacente. L'utilité instantanée $u[\cdot, t] : R^+ \rightarrow R$ est strictement croissante, deux fois continuement différentiable, strictement concave, et $u'[0,t] = +\infty \ \forall t \in [0,T]$. ($u'[\cdot, t]$ dénote la dérivée première par rapport au premier argument.)

III) LE PROBLÈME D'INFÉRENCE

L'agent représentatif dans ce modèle forme ses croyances sur la position de la variable d'état non observée, θ_t, en utilisant l'information collectée jusqu'au point de décision, $F_t^{\eta,\varepsilon} \equiv \sigma - \{(\eta_s, \varepsilon_s) : 0 \leqq s \leqq t\}$. Ce problème est un problème d'inférence bayésienne en temps continu pour un système de processus stochastiques partiellement observable (Liptser et Shiryayev (1977)). Des versions particulières de ce problème sont utilisées dans les études antérieures des prix des actifs financiers en économie à information incomplète. Dans ces études précédentes, l'investisseur a un comportement passif en ce qui concerne son activité de contrôle de l'état de l'appareil productif, dans la mesure où il n'influence pas la qualité de l'information collectée. Cette hypothèse restrictive est relachée dans cet article : le choix du système d'information constitue une décision supplémentaire à l'initiative de l'agent.

La possibilité de contrôle de la précision du signal ε_t introduit une difficulté supplémentaire dans la procédure d'inférence. Pour un processus de contrôle $\{(n_t, F_t^{\eta,\varepsilon}) : 0 \leqq t \leqq T\}$, la mesure de probabilité conditionnelle de θ_t étant donnée l'information $F_t^{\eta,\varepsilon}$ peut, en principe, dépendre de la trajectoire des signaux $\{(\eta_s, \varepsilon_s) : 0 \leqq s \leqq t\}$ jusqu'au temps t. Il est également possible que l'évolution de cette mesure conditionnelle ne puisse pas être représentée par un nombre fini et constant de statistiques suffisantes. Par voie de conséquence la méthode de programmation dynamique ne pourrait être utilisée, dans ce cas, pour résoudre le problème de contrôle de l'investisseur.

Sous des hypothèses restrictives, il nous est cependant possible de dégager certaines implications de la possibilité de contrôle du système d'information. Soit $\hat{\theta}_t \equiv E[\theta_t | F_t^{\eta,\varepsilon}]$ et $\gamma_t \equiv E[(\theta_t - \hat{\theta}_t)^2 | F_t^{\eta,\varepsilon}]$ respectivement l'espérance et la variance conditionnelles de la variable d'état θ_t, étant donné l'information $F_t^{\eta,\varepsilon}$. Supposons pour l'instant que les politiques de contrôle $n(\cdot)$ dont dispose l'investisseur sont markoviennes de la forme $n(\hat{\theta}_t, \gamma_t, t)$, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent que de l'espérance et de la variance conditionnelles courantes.[4]

Hypothèses III.1. (Politiques admissibles) : Le processus $\{n_t : 0 \leqq t \leqq T\}$ satisfait les conditions suivantes :

4. Voir note 1.

(i) $n_t = n(\hat{\theta}_t, \gamma_t, t),\ t \in [0,T]$

(ii) $P\left(\int_0^T B^2(t) n_t^{-2} dt < \infty\right) = 1$; $B^2(t) n_t^{-2} \geqq K_1 > 0 \qquad \forall t \in [0,T]$

(iii) $B(t)n_t^{-1}$ est Borel-mesurable $\forall t \in [0,T]$, et satisfait une condition de croissance et une condition de Lipschitz.[5]

Nous noterons que la restriction (ii) ci-dessus élimine le choix d'une précision infinie ou nulle sur un ensemble de mesure strictement positive. La discussion intuitive de la section précédente suggère qu'il existe un ensemble de coefficients du modèle (α_0, α_1, b_2, k(.),...) pour lequel une solution intérieure existe. Pour la classe de politiques admissibles décrite à l'hypothèse III.1., le système (θ_t,ε_t, η_t,$\hat{\theta}_t$,γ_t) suit un processus de diffusion vectoriel. La distribution conditionnelle de la variable d'état θ_t étant donné les observations passées $F_t^{\eta,\varepsilon}$ est normale et est complètement déterminée par le système composé de la moyenne conditionnelle, $\hat{\theta}_t$ et de la variance conditionnelle γ_t.

Proposition III.1.: Sous les hypothèses II.1., II.2., II.3. et III.1., la distribution conditionnelle de θ_t étant donné l'historique $F_t^{\eta,\varepsilon} \equiv \sigma - \{(\eta_s,\varepsilon_s) : 0 \leqq s \leqq t\}$ est normale avec pour moyenne $\hat{\theta}_t$ et pour variance γ_t solutions du système d'équations,

$$d\hat{\theta}_t = [a_0(t) + a_1(t)\hat{\theta}_t]\, dt + \begin{bmatrix} b_1(t)G(t) + \alpha_1(t)\gamma_t \\ b_2(t)\dfrac{B(t)}{\sqrt{n}} + A_1(t)\gamma_t \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} G(t)G'(t) & 0 \\ 0 & \dfrac{B^2(t)}{(\sqrt{n})^2} \end{bmatrix}^{-1/2} d\upsilon_t \tag{3.1}$$

$$\dot{\gamma}_t = 2a_1(t)\gamma_t + b_1^2(t) + b_2^2(t) - \begin{bmatrix} b_1(t)G(t) + \alpha_1(t)\gamma_t \\ b_2(t)\dfrac{B(t)}{\sqrt{n}} + A_1(t)\gamma_t \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} G(t)G'(t) & 0 \\ 0 & \dfrac{B^2(t)}{(\sqrt{n})^2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1(t)G(t) + \alpha_1(t)\gamma_t \\ b_2(t)\dfrac{B(t)}{\sqrt{n}} + A_1(t)\gamma_t \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

$$\hat{\theta}_0 = m_0,\ \gamma_0 = \sigma_0^2$$

où $\{\upsilon_t\colon 0 \leqq t \leqq T\}$ est un processus d'innovation défini par,

5. Voir Liptser et Shiryayev (1977), p. 298, équations (8.4) et (8.5).

$$d\upsilon_t = \begin{bmatrix} d\upsilon_1(t) \\ d\upsilon_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} G(t)G'(t) & 0 \\ 0 & (\frac{B(t)}{\sqrt{n}})2 \end{bmatrix}^{-1/2} \begin{bmatrix} I_\eta{}^{-1}d\eta_t - [\alpha_o(t) + \alpha_1(t)\hat{\theta}_t]dt \\ d\varepsilon_t - [A_0(t) + A_1(t)\hat{\theta}_t]dt \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

et $\{(\upsilon_t, F_t^{\eta,\varepsilon}): 0 \leqq t \leqq T\}$ est un processus de Wiener.

La démonstration de ce résultat apparaît dans l'annexe. Afin de simplifier la notation dans la suite de l'article, nous omettrons d'écrire explicitement l'argument des paramètres du modèle (α_0, α_1, etc.). Le système markovien d'équations (3.1)-(3.3) caractérise l'évolution de la distribution postérieure. Cette proposition nous indique que sous l'hypothèse III.1, l'information contenue dans l'historique des observations $F_t^{\eta,\varepsilon}$, est équivalente à l'information générée par l'observation de l'espérance et de la variance conditionnelles $F^{\hat{\theta},\gamma} \equiv \sigma - \{(\hat{\theta}_s, \gamma_s) : 0 \leqq s \leqq t\}$. En outre, puisque le filtre constitué de l'espérance conditionnelle (équation (3.1)) et de l'équation localement déterministe satisfaite par la variance (équation (3.2)) forme un système markovien, nous avons $F_t^{\hat{\theta},\gamma} = G_t^{\hat{\theta},\gamma} \equiv \sigma - \{\hat{\theta}_t, \gamma_t\}$: la position courante $(\hat{\theta}_t, \gamma_t)$ capture toute l'information contenue dans l'historique $F_t^{\eta,\varepsilon}$.

Le processus d'innovation $\{\upsilon_t: 0 \leqq t \leqq T\}$, défini à l'équation (3.3), représente les surprises générées par l'observation du signal (η_t, ε_t). Pour simplifier la discussion, considérons la seconde composante, $\upsilon_2(t)$, du processus υ_t, c'est-à-dire la composante correspondant au signal (ε_t). Puisque $\{\upsilon_t, F_t^{\eta,\varepsilon}: 0 \leqq t \leqq T\}$ est un processus de Wiener, en prenant l'espérance conditionnelle du changement dans la valeur du signal ε_t (équation (3.3)) nous obtenons $E[d\varepsilon_t | F_t^{\eta,\varepsilon}] = [A_0 + A_1\hat{\theta}_t]dt + [B/\sqrt{n}]\,E[d\upsilon_2(t) | F_t^{\eta,\varepsilon}] = [A_0 + A_1\hat{\theta}_t]dt$. Il suit que $d\upsilon_2(t)$ peut s'écrire $d\upsilon_2(t) = (\sqrt{n}/B)[d\varepsilon_t - E[d\varepsilon_t | F_t^{\eta,\varepsilon}]]$. Le procesus $\upsilon_2(t)$ représente donc l'erreur dans l'estimation du signal $d\varepsilon_t$ ou encore l'innovation dans l'information collectée.

Le système d'équations (3.1)-(3.3) n'est autre que le résultat d'une procédure bayésienne de révision de la distribution conditionnelle de la variable d'état. Une dérivation heuristique intuitive de ces équations peut être faite de la manière suivante. Nous procédons en deux étapes. Dans un premier temps, nous traiterons le cas $b_2=0$. Dans un second temps, nous identifierons les termes supplémentaires introduits lorsque $b_2 \neq 0$. Soit donc, pour commencer, le cas $b_2=0$. L'observation du signal $\{\varepsilon_t : 0 \leqq t \leqq T\}$, dans ce cas, produit de l'information quant à la position de la variable θ_t exclusivement. Le processus de Wiener non observé $\{z_2(t) : 0 \leqq t \leqq T\}$ représente le bruit dans l'estimation. Pour fixer un point de départ nous supposerons également que la distribution a priori de θ_t est normale $N(\hat{\theta}, \gamma)$ avec pour espérance $\hat{\theta}$ et pour variance γ. La distribution du signal $d\varepsilon_t$ est également normale $N((A_0+A_1\theta)dt, (B^2/(\sqrt{n})^2)dt)$, avec pour moyenne inconnue $(A_0 + A_1\theta)dt$ et pour variance connue $(B^2/(\sqrt{n})^2)dt$. Une application classique du problème d'estimation bayésienne de la moyenne d'une distribution normale avec une distribution a priori normale (Bickel et Doksum (1977), p. 419) donne pour la moyenne $(A_0+A_1\theta)dt$, la postérieure

$$N[(A_0+A_1\,\hat{\theta})\frac{(B/\sqrt{n})^2}{A_1^2\gamma dt+(B/\sqrt{n})^2}\,dt+d\varepsilon\,\frac{A_1^2\gamma dt}{A_1^2\gamma dt+(B/\sqrt{n})^2},\frac{(B/\sqrt{n})^2dt}{1+\dfrac{(B/\sqrt{n})^2}{A_1^2\gamma dt}}]$$

puisque $(A_0+A_1\theta)dt$ est $N[(A_0+A_1\hat{\theta})dt, A_1^2\gamma\,(dt)^2]$ a priori. Après une série de manipulations simples, nous obtenons la distribution révisée de θ_t étant donné F^ε_{t+dt},[6]

$$N[\hat{\theta}+\frac{A_1\gamma}{B/\sqrt{n}}dv_2(t),\ \frac{(B/\sqrt{n})^2\gamma}{A_1^2\gamma dt+(B/\sqrt{n})^2}\ ] \tag{3.4}$$

L'estimateur $\hat{\theta}_{t+dt}$ de la position de θ_{t+dt} sera donc, au vu de l'équation (2.2),

$$\hat{\theta}_{t+dt} = \hat{\theta}_t + \frac{A_1\gamma}{B/\sqrt{n}}\ dv_2\ (t) + [a_0+a_1\ \hat{\theta}_t]dt. \tag{3.5}$$

Les deux premiers termes ci-dessus proviennent de la révision de l'estimateur $\hat{\theta}_t$ (équation (3.4)), tandis que le troisième terme n'est autre que la valeur révisée de l'espérance locale du processus θ_t.[7]

La variance conditionnelle de θ_{t+dt}, de manière similaire devient,

$$\mathrm{Var}[\theta_{t+dt}\,|F^\varepsilon_{t+dt}] = \mathrm{Var}[\theta_t\,|F^\varepsilon_{t+dt}] + a_1^2\mathrm{Var}[\theta_t\,|F^\varepsilon_{t+dt}]\,(dt)^2 + b_1^2dt + 2\ \mathrm{Cov}\ [\theta_t, a_1\theta_t\ dt|F^\varepsilon_{t+dt}]. \tag{3.6}$$

Soit encore,

$$\mathrm{Var}[\theta_{t+dt}\,|F^\varepsilon_{t+dt}] = [1 - \frac{A_1^2\gamma}{(B/\sqrt{n})^2}\ dt]\ \gamma + b_1^2dt + 2a_1\gamma dt$$

en procédant aux substitutions et simplifications appropriées.[8]

---

6. Afin d'obtenir l'équation (3.4) du texte, nous substituons tout d'abord l'expression $d\varepsilon = (B/\sqrt{n})dv_2 + [A_0+A_1\hat{\theta}_t]dt$ dans l'expression pour la distribution postérieure de $(A_0+A_1\theta_t)dt$. Une inversion simple produit alors la distribution révisée de θ_t étant donné F^ε_{t+dt}. L'équation (3.4) est obtenue en utilisant le fait que $A_1(B/\sqrt{n})\,[A_1^2\gamma\,dt+(B/\sqrt{n})^2]^{-1}dv_2(t) \approx A_1\ (B/\sqrt{n})^{-1}\ [1 - (A_1^2\gamma/(B/\sqrt{n})^2)dt]\ dv_2(t) \approx A_1(B/\sqrt{n})^{-1}\ dv_2(t)$. La première approximation provient du fait que dt est voisin de zéro; la seconde suit puisque $dt.dv_2(t) = 0$.

7. En effet nous avons $E[a_0+a_1\theta|F^\varepsilon_{t+dt}]dt = (a_0 + a_1(\hat{\theta}_t+\frac{A_1\gamma}{B/\sqrt{n}}dv_2))dt = (a_0 + a_1\hat{\theta}_t)dt$ puisque $(dv_2)(dt)$ est un terme de second ordre. Notons également que $E[dz_1|F^\varepsilon_{t+dt}] = 0$ puisque $\{z_1(t)\}$ et $\{z_2(t)\}$ sont indépendants.

8. Le premier terme à droite de l'équation (3.6) n'est autre que la variance révisée de θ_t. En tenant compte du fait que $A_1^2\gamma dt$ est voisin de zéro, ce terme est équivalent à $[1-\frac{A_1^2\gamma}{(B/\sqrt{n})^2}\ dt]\gamma$. Il suit que le gain de précision dû à l'information supplémentaire est égale à $(A_1^2\gamma/(B/\sqrt{n})^2)dt$. Le second terme est d'ordre $(dt)^2$, et disparaît donc de l'équation (3.6). Le troisième terme est la variance due au bruit $b_1dz_1(t)$. Finalement le dernier terme représente la covariance conditionnelle révisée entre la position initiale θ_t et le changement moyen dans cette position $((a_1\theta_t+a_0)dt)$. Ce terme est égale à $2a_1\mathrm{Var}\,[\theta_t|F^\varepsilon_{t+dt}]dt = 2a_1\gamma dt$ en éliminant les termes de second ordre.

L'effet du choix de précision n du signal est obtenu par inspection de l'expression (3.4) pour la distribution postérieure. Un accroissement de la précision réduit le bruit dans le signal et en conséquence réduit la variance postérieure de θ_t. La gain de précision, $[A_1^2\gamma/(B/\sqrt{n})^2]\,dt$, quant à la position θ_{t+dt}, augmente. L'accroissement de la précision $\sqrt{n}$, cependant, affecte également la moyenne postérieure. La réduction dans le bruit du signal rend en effet la moyenne révisée plus sensible aux observations. Il suit que le processus suivi par la moyenne conditionnelle (équation (3.5)) a une variance locale plus élevée $([(A_1\gamma)^2/(B/\sqrt{n})^2]dt)$.

Finalement, si nous relâchons l'hypothèse $b_2=0$, les observations du signal ε_t transmettent également de l'information quant à la réalisation du processus de Wiener $dz_2(t)$. Il suit que $[b_2B/\sqrt{n}]dt$, qui est la covariance entre les processus θ_t et ε_t introduite par $dz_2(t)$, apparaît dans les expressions (3.1) et (3.2).

L'expression $b_2E[\,dz_2(t)\,|F^{\varepsilon}_{t+dt}\,] = b_2 d\upsilon_2(t)$ est celle qui doit être ajoutée à la moyenne (équation (3.5)) lorsque le signal est corrélé avec le processus de Wiener $z_2(t)$. En calculant la variance conditionnelle Var $[\theta_{t+dt}|F^{\varepsilon}_{t+dt}]$, les termes Var $[b_2dz_2(t)\ |F^{\varepsilon}_{t+dt}]$, 2 Cov $[\theta_t, b_2dz_2(t)|F^{\varepsilon}_{t+dt}\,]$ et 2 Cov $[a_1\theta_t dt, b_2dz_2(t)|F^{\varepsilon}_{t+dt}]$ s'ajoutent aux termes de l'expression (3.6).[9] Comme le terme de variance et la deuxième covariance sont de second ordre, la seule modification est l'addition du terme $2b_2\text{Cov}\,[\theta_t,\ dz_2(t)|F^{\varepsilon}_{t+dt}] = -2b_2(\sqrt{n}/B)\ A_1\gamma dt$. Ce terme est précisément le terme supplémentaire apparaissant dans l'équation (3.2) puisque $b_2^2 - [b_2(B/\sqrt{n})+A_1\gamma]^2(B/\sqrt{n})^{-2} = -2b_2(\sqrt{n}/B)A_1\gamma - [A_1\gamma/(B/\sqrt{n})]^2$.

Remarque III.1. : La raisonnement intuitif suivi ci-dessus ne dépend pas de l'hypothèse d'un contrôle markovien du type $n(\hat{\theta},\gamma,t)$. Les mêmes résultats peuvent être dérivés lorsque la classe de contrôles admissibles est celle des contrôles mesurables par rapport à l'information $F_t^{\eta,\varepsilon}$. Ceci nous conduit à la conjecture que la distribution postérieure, pour le système d'information décrit, est normale lorsque le processus de contrôle est une fonction quelconque, mesurable par rapport aux observations $F_t^{\eta,\varepsilon}$.[10]

IV. LA DEMANDE D'INFORMATION

(1) *Le programme du consommateur*

Afin de formuler le programme du consommateur il nous faut spécifier la contrainte budgétaire dynamique de l'investisseur. Soit W_t la richesse au temps t. Nous avons,

$$dW_t = w'WI_\eta^{-1}d\eta_t + [W(1-w'\underline{1})r\text{-}c\text{-}k(n)]dt \qquad (4.1)$$

9. Selon (2.3) nous avons $dz_2 = (\sqrt{n}/B)\ [d\varepsilon_t-(A_0+A_1\theta_t)dt]$. D'où,
$b_2E[dz_2(t)|F^{\varepsilon}_{t+dt}\,] = b_2dv_2(t)$
$b_2^2\text{Var}[dz_2(t)|F^{\varepsilon}_{t+dt}\,] = b_2^2(\sqrt{n}/B)^2A_1^2\ \text{Var}[\theta_t|F^{\varepsilon}_{t+dt}\,](dt)^2$
et
$2\ \text{Cov}[\theta_t,dz_2(t)|F^{\varepsilon}_{t+dt}\,] = -2(\sqrt{n}/B)A_1\ \text{Var}[\theta_t|F^{\varepsilon}_{t+dt}\,]dt.$

10. Ceci fait partie de l'intuition sous-jacente à la conjecture formulée à la note 1.

Puisque le niveau de richesse complète la description de l'économie, cette variable est prise en compte dans le processus de décision. L'ensemble des contrôles admissibles U est alors redéfini de la manière suivante,

Hypothèse IV.I. (politiques admissibles): Le processus $x \equiv \{x_t \equiv (n_t, c_t, w_t): 0 \leqq t \leqq T\}$ satisfait les conditions suivantes

(i) $x_t = x(W_t, \hat{\theta}_t, \gamma_t, t),\ t \in [0,T]$

(ii) $x_t \geqq 0,\ \infty > n_t > 0,\ t \in [0,T]$

(iii) x satisfait les conditions d'existence d'une solution au système d'équations différentielles stochastiques (2.3), (3.1), (3.2) et (4.1).[11]

Le programme (P-1) de l'investisseur peut alors être écrit de la manière suivante,

$$\underset{x}{\text{Max}}\ E\int_0^T u[c_s, s]ds$$

sujet à $dW_t = [w'W[\alpha_0+\alpha_1\theta]dt + W(1\text{-}w'\underline{1})r - c - k(n)]dt + w'WGdz_1(t)$

$x \in U$

$(\theta_t, \varepsilon_t, \eta_t)$ satisfaisant les hypothèses II.1.-II.3.

Afin de résoudre ce programme l'investisseur prend en compte l'information $F_t^{\eta,\varepsilon}$. Dans la mesure où les contrôles admissibles sont markoviens et puisque l'observation du processus de richesse (W_t) ne transmet pas d'information supplémentaire quant à la position de la variable d'état (θ_t), les résultats de la section précédente peuvent être appliqués. Le système $(\theta_t, \eta_t, \varepsilon_t, \hat{\theta}_t, \gamma_t, W_t)$ suit un processus de diffusion joint et la distribution conditionnelle de θ_t étant donné que l'information $F_t^{\eta,\varepsilon}$ est Gaussienne. Cette distribution postérieure est complètement déterminée par la moyenne conditionnelle $\hat{\theta}_t$ et la variance conditionnelle γ_t. Le système $(\hat{\theta}_t, \gamma_t, W_t)$, finalement, forme un *processus de diffusion joint* et caractérise complètement l'évolution de la distribution conditionnelle.

Soit maintenant le programme (P-2) défini par

$$\underset{x}{\text{Max}}\ E\int_0^T u[c_s, s]ds$$

sujet à $dW_t = [w'W[\alpha_0+\alpha_1\hat{\theta}_t] + W(1-w'\underline{1})r - c - k(n)]dt + w'W(GG')^{1/2}\, d\nu_1(t)$

$x \in U° \equiv \{x$: x_t est $F_t^{\hat{\theta},\gamma,W}$ – mesurable, $x_t \geqq 0,\ \infty > n_t > 0$, $\forall t \in [0,T]$; x satisfait aux conditions d'existence d'une solution au système (3.1),(3.2) et (4.1)$\}$.

$(\hat{\theta}_t, \gamma_t)$ satisfaisant les équations (3.1)-(3.3).

L'équation pour la richesse dans (P-2) est obtenue en utilisant la relation $I_\eta^{-1} d\eta_t = [\alpha_0+\alpha_1\hat{\theta}]dt + (GG')^{1/2}\, d\nu_1(t)$. Le programme (P-2) constitue un programme d'optimisation sous information complète. En effet, l'état du système pour ce programme $(W_t, \hat{\theta}_t, \gamma_t)$ est complètement observé. La proposition suivante établit l'équivalence entre (P-1) et (P-2).

11. Voir Gihman et Skorohod (1979), p. 216.

Proposition IV.1.: Supposons qu'il existe une loi de contrôle optimale markovienne, x^*, pour le programme (P-2) où (W_t, $\hat{\theta}_t, \gamma_t$) est complètement observé. Alors x^* est une solution du programme (P-1) avec information incomplète.

Le programme (P-2) est un programme sous information complète où l'état du système est décrit par le triplet ($W_t, \hat{\theta}_t, \gamma_t$). S'il existe une loi de contrôle optimale markovienne $x_t^* = x(W_t, \hat{\theta}_t, \gamma_t, t)$, solution de ce problème, cette loi est admissible pour le programme (P-1). Mais lorsque $x^* \in U$, la Proposition III.1., adaptée à notre cas, établit que $F_t^{\eta,\varepsilon} = F_t^{\hat{\theta},\gamma,W} = G_t^{\hat{\theta},\gamma,W} \equiv \sigma-\{W_t, \hat{\theta}_t, \gamma_t\}$. Le système ($W, \hat{\theta}, \gamma$) obtenu (équations (3.1)-(3.3) et contrainte budgétaire) étant le même que celui apparaissant au programme (P-2), il suit que x^* est solution du programme (P-1).

Le problème (P-2) est un problème d'optimisation sous information complète générée par le système markovien ($W_t, \hat{\theta}_t, \gamma_t$). Sous des hypothèses classiques (*cf.* Merton (1971)) ce programme se réduit au problème (P-3) suivant,

$$-J_t = \max_{\{c,w,n\}} u[c,t] + J_W[w'W(\alpha_0+\alpha_1\hat{\theta}-r\underline{1})+Wr-c-k(n)] + J_{\hat{\theta}}[a_0+a_1\hat{\theta}]$$
$$+ J_\gamma[2a_1\gamma+b_1^2+b_2^2-(b_1G'+\gamma\alpha_1')(GG')^{-1}(Gb_1+\alpha\gamma) \; -(b_2+\gamma A_1\frac{\sqrt{n}}{B})^2]$$
$$+ \tfrac{1}{2}J_{WW}w'W(GG')wW + \tfrac{1}{2}J_{\hat{\theta}\hat{\theta}}[(b_1G'+\gamma\alpha_1')(GG')^{-1} \; (Gb_1+\alpha_1\gamma)$$
$$+ (b_2+\gamma A_1\frac{\sqrt{n}}{B})^2] + J_{W\hat{\theta}}w'W(Gb_1+\alpha_1\gamma)$$

sujet à $J[W,\hat{\theta},\gamma,T] = 0$ et aux contraintes sur les contrôles $c \geqq 0$, $w \geqq 0$, et $n > 0$.

(2) *La demande d'information*

Les conditions de premier ordre pour le programme (P-3) sont,

$$\psi_c \equiv u_c - J_W \leqq 0$$
$$c\psi_c = 0; \; c \geqq 0$$
$$\psi_w \equiv J_W[\alpha_0+\alpha_1\hat{\theta}-r.\underline{1}] + J_{WW}(GG')wW + J_{W\hat{\theta}}(Gb_1+\alpha_1\gamma) \leqq 0$$
$$w\psi_w = 0; \; w \geqq 0$$
$$\psi_n \equiv (\tfrac{1}{2})(J_{\hat{\theta}\hat{\theta}}-2J_\gamma)\,(b_2n^{-1/2}+\gamma A_1B^{-1})\gamma A_1B^{-1} - J_Wk'(n) = 0$$
$$n > 0$$

Sous l'hypothèse d'existence d'un maximum intérieur,[12] nous obtenons la proposition suivante,

12. Lorsque le coefficientes b_2 est nul, la condition de second ordre correspondant au contrôle n est satisfaite puisque la fonction de coût $k(n)$ est strictement convexe ($\psi_{nn} = - J_wk''(n) < 0$). Dans ce cas les conditions de premier ordre sont nécessaires et suffisantes.

Proposition IV.2.: S'il existe un maximum intérieur, la politique optimale $x = (n, c, w)$ est donné par,

$$c \quad = u_c^{-1}[J_W,t] \tag{4.1}$$

$$wW = -\frac{J_W}{J_{WW}}(GG')^{-1}[\alpha_0+\alpha_1\hat{\theta}-r.1] - \frac{J_{W\hat{\theta}}}{J_{WW}}(GG')^{-1}[Gb_1+\alpha_1\gamma] \tag{4.2}$$

$$n \quad = \quad \phi(\tfrac{1}{2}\,\frac{J_{\hat{\theta}\hat{\theta}}-2J_\gamma}{J_W}(b_2 n^{-\frac{1}{2}} + \gamma A_1 B^{-1})\gamma A_1 B^{-1}) \tag{4.3}$$

où $\phi(\cdot) \equiv k'(\cdot)^{-1}$ est l'inverse de la derivée de la fonction de coût.

Les fonctions de demande de consommation et d'investissement (équations (4.1) et (4.2)) ont la structure classique obtenue dans les modèles de portefeuille à information complète (*cf.* Merton (1971)). Ceci n'implique pas, cependant, l'absence d'effet du choix de précision sur ces décisions. En effet, la fonction valeur $J(\cdot)$ dépend de la structure du problème de l'investisseur et capture donc les ramifications de la possibilité de contrôle de l'information.

La demande d'information est donné par l'équation (4.3). Cette représentation constitue une forme implicite puisque le contrôle n apparaît dans l'argument de l'inverse de la dérivée de la fonction de coût. Elle met, cependant, en évidence deux composantes de la demande de précision.

(i) La première composante $(\frac{1}{2}(J_{\hat{\theta}\hat{\theta}}-2J_\gamma)J_W^{-1}(\gamma A_1 B^{-1})^2)$ est une demande d'information provenant de la faculté de contrôle de la révision de l'espérance conditionnelle au vu des observations nouvelles obtenues (*cf.* équation (3.5)).

(ii) La seconde composante $(\frac{1}{2}(J_{\hat{\theta}\hat{\theta}}-2J_\gamma)\,J_W^{-1}\;b_2 n^{-\frac{1}{2}}\gamma A_1 B^{-1})$ provient de l'information quant à la réalisation du processus de Wiener $dz_2(t)$ transmise par l'observation du signal $d\varepsilon_t$ (*cf.* la discussion précédant la remarque III.1). Cette information existe puisque la covariance entre $d\theta_t$ et $d\varepsilon_t$ diffère de zéro (cov $[d\theta_t,d\varepsilon_t|\theta_t,\hat{\theta}_t,\varepsilon_t] = b_2(B/\sqrt{n}) \neq 0$). La demande totale d'information résulte du conflit entre ces deux objets d'apprentissage.

3. *Le prix d'équilibre de l'information*

Afin de calculer le prix de l'information, k, il nous faut clore le modèle en spécifiant les conditions d'équilibre. Nous supposerons que l'offre de précision est une fonction markovienne, inélastique par rapport au prix, et qui dépend de l'espérance et de la variance de la distribution postérieure $(n_t^s = n(\hat{\theta},\gamma,t))$. Nous supposerons également que $k(n) \equiv p.\, k(n)$ où p est déterminé de manière endogène. L'équilibre est défini de la manière suivante,

Définition IV.1.: Le processus $\{(c_t,w_t,n_t,p_t,r_t)\colon 0 \leqq t \leqq T\}$ est un équilibre pour le mécanisme d'information à offre de précision inélastique si et seulement si (c_t,w_t,n_t) résoud le programme (P-3) de l'investisseur, et les marchés sont équilibrés aux prix $r_t \geqq 0$ et $p_t \geqq 0$:

(i) marché financier : $w'.1 = 1$ (4.4)

(ii) marché de l'information: $n_t = n_t^s$ (4.5)

La condition (4.4) exprime le fait qu'à l'équilibre, le titre obligataire sans risque n'est pas détenu par l'investisseur (offre nette nulle). L'équilibre sur le marché de l'information stipule l'égalité entre l'offre et la demande de précision (équation (4.5)). En combinant les conditions de premier ordre du programme (P-3) de l'investisseur et les conditions d'équilibre sur les marchés, nous obtenons les prix d'équilibre r_t et p_t.

Proposition IV.3.: S'il existe une solution intérieure $\{(c_t^*, w_t^*, n_t^*, p_t^*, r_t^*) : 0 \leqq t \leqq T\}$ le système de prix d'équilibre (p_t^*, r_t^*) est donné par,

$$r^* = \frac{WJ_{WW}}{J_W}\,[\underline{1}'(GG')^{-1}\underline{1}]^{-1} + \frac{J_{W\hat{\theta}}}{J_W}\,\frac{\underline{1}'(GG')^{-1}[Gb_1+\alpha_1\gamma]}{\underline{1}'(GG')^{-1}\underline{1}} + \frac{\underline{1}'(GG')^{-1}(\alpha_0+\alpha_1\hat{\theta})}{\underline{1}'(GG')^{-1}\underline{1}} \qquad (4.6)$$

$$p^* = ½\,\frac{J_{\hat{\theta}\hat{\theta}}-2J_\gamma}{J_W k'(n^s)}[b_2(n^s)^{-½} + \gamma A_1 B^{-1}]\,\gamma A_1 B^{-1} \qquad (4.7)$$

où la fonction valeur est solution de l'équation différentielle

$$-J_t = u[u_c^{-1}[J_W,t],t] - ½\Big[\frac{J_W^2}{J_{WW}}(\alpha_0+\alpha_1\hat{\theta}-r^*.\underline{1})'(GG')^{-1}(\alpha_0+\alpha_1\hat{\theta}-r^*.\underline{1})$$

$$+\frac{J_{W\hat{\theta}}^2}{J_{WW}}(Gb_1+\alpha_1\gamma)'(GG')^{-1}(Gb_1+\alpha_1\gamma) + 2\,\frac{J_W J_{W\hat{\theta}}}{J_{WW}}(Gb_1+\alpha_1\gamma)'(GG')^{-1}$$

$$(\alpha_0+\alpha_1\hat{\theta}-r^*.\underline{1})\Big] + J_W[Wr^* - u_c^{-1}[J_W,t] - p^*k(n^s)] + J_{\hat{\theta}}\mu_{\hat{\theta}} + J_\gamma\mu_\gamma(n^s)$$

$$+ ½J_{\hat{\theta}\hat{\theta}}V_{\hat{\theta}\hat{\theta}}(n^s) \qquad (4.8)$$

sujet à $J[W,\hat{\theta},\gamma,T] = 0$, $\mu_{\hat{\theta}}$, $\mu_\gamma(n^s)$ et $V_{\hat{\theta}\hat{\theta}}(n^s)$ sont respectivement l'espérance locale des processus $d\hat{\theta}$ et $\dot{\gamma}$, et la matrice de variance-covariance locale de $d\hat{\theta}$ évaluées au point $n^s = n(\hat{\theta},\gamma,t)$.

La formule (4.6) du taux d'intérêt d'équilibre est similaire dans sa structure à celle obtenue dans les modèles à information incomplète non controlée (Detemple (1986(b)), Dothan et Feldman (1986)).[13]

L'existence d'un marché supplémentaire (marché de l'information), et d'une fonction d'offre d'information exogène (n^s) n'affecte pas directement la structure du taux d'intérêt. Ces éléments cependant ont un effet par l'intermédiaire de la fonction valeur (*cf.* l'équation de Bellman (4.8)).

13. La structure du taux d'intérêt d'équilibre est celle obtenue dans Cox, Ingersoll et Ross (1985), sous réserve de réinterprétation de la variable d'état.

Le prix unitaire de l'information (p^*) est donné par l'équation (4.7). Ce prix dépend linéairement de deux éléments: (i) la demande d'équilibre d'information sur le processus de Wiener $z_2(t)$ et (ii) la demande d'équilibre d'information induite par le contrôle de la révision de l'estimateur $\hat{\theta}_t$ au vu de l'observation $d\varepsilon_t$. Le prix de l'information est également inversement proportionnel à $k'(n)$. Ces termes ont également un effet indirect par l'intermédiaire de la fonction valeur. Une interprétation alternative est obtenue en notant que $[b_2(n^s)^{-1/2} + \gamma A_1 B^{-1}]\gamma A_1 B^{-1}$ représente l'effet marginal du contrôle n sur la variance conditionnelle locale de l'estimateur $\hat{\theta}_t$, évalué à l'équilibre n^s. C'est-à-dire $[b_2(n^s)^{-1/2} + \gamma A_1 B^{-1}]\gamma A_1 B^{-1} = [\partial \mathrm{Var}[d\hat{\theta}_t | F_t^{W,\hat{\theta},\gamma}]/\partial n]|_{n=n^s}$. Le prix d'équilibre est alors proportionnel à ce terme (faisant abstraction des effets indirects).

Avant de conclure, nous noterons que la demande d'investissement dans les technologies de production (équation (4.2)) ne comprend pas de terme de couverture contre le risque de l'estimateur $\hat{\theta}_t$ connecté à l'offre de précision n^s. Ceci provient de l'indépendance locale entre les deux sources d'information ε_t et η_t ($z_1(t)$ et $z_2(t)$ sont des processus de Wiener indépendants). Lorsque la corrélation entre ces deux signaux est non nulle l'investisseur cherchera également à se couvrir contre le risque lié à l'offre n^s.

V. CONCLUSION

Deux points peuvent être dégagés de cet article. En premier lieu nous montrons l'application de certaines techniques couramment utilisées en finance à l'étude de la demande d'information et de la valeur de l'information. En second lieu, le modèle étudié constitue une première approche dans l'élaboration d'une théorie de l'acquisition d'information en environnement intertemporel. Dans le contexte de la structure spécifique analysée dans cet article, plusieurs questions se posent. La première concerne l'optimalité des stratégies markoviennes décrites, dans la classe plus générale des contrôles non anticipatifs. Ainsi que notre démonstration heuristique le suggère, la distribution postérieure semble être gaussienne pour cette classe de contrôles. La seconde question à résoudre est celle de l'existence de l'équilibre décrit. En particulier il nous paraît intéressant de développer des exemples où la fonction valeur est explicitement dérivée. Ces questions, ainsi que des extensions de ce modèle font l'objet de nos recherches actuelles.

ANNEXE

Démonstration de la Proposition III.1.

Nous montrons que sous les hypothèses de la proposition le système $(\theta_t, \varepsilon_t, \eta_t, \hat{\theta}_t, \gamma_t)$ est un processus de diffusion vectoriel et que la distribution conditionnelle est gaussienne. Pour un système de diffusion partiellement observable, la densité conditionnelle, ρ, satisfait, si elle existe, l'équation différentielle stochastique (*cf.* Théorème 8.6, Liptser et Shiryayev (1977)),

$$d\rho = [-\rho_\theta(a_0+a_1\theta) - \rho a_1 + \tfrac{1}{2}\rho_{\theta\theta}(b_1^2+b_2^2)]dt$$

$$+\{-\rho_\theta \begin{bmatrix} b_1 G \\ b_2 \frac{B}{\sqrt{n}} \end{bmatrix}' + \rho(\theta-\hat{\theta}) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ A_1 \end{bmatrix}'\} \begin{bmatrix} GG' & 0 \\ 0 & \frac{B^2}{(\sqrt{n})^2} \end{bmatrix}^{-1/2} d\nu_t \quad \text{(A-1)}$$

où ν_t est le processus de Wiener défini par l'équation (3.3) dans le texte. Puisque $n_t = n(\hat{\theta},\gamma,t)$ est une fonction mesurable par rapport à $F_t^{\eta,\varepsilon}$, nous pouvons utiliser les équations générales de filtrage (*cf.* Liptser et Shiryayev (1977), Théorème (8.1), et équations (12.23) et (12.27)). Nous obtenons alors,

$$d\hat{\theta}_t = (a_0 + a_1\hat{\theta}_t)dt + \begin{bmatrix} b_1 G + \alpha_1\gamma \\ b_2 \frac{B}{\sqrt{n}} + A_1\gamma \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} GG' & 0 \\ 0 & \frac{B^2}{(\sqrt{n})^2} \end{bmatrix}^{-1/2} d\nu_t \quad \text{(A-2)}$$

$$d\gamma_t = \{2a_1\gamma_t + b_1^2 + b_2^2 - \begin{bmatrix} b_1 G + \alpha_1\gamma \\ b_2 \frac{B}{\sqrt{n}} + A_1\gamma \end{bmatrix}'$$

$$\begin{bmatrix} GG' & 0 \\ 0 & \frac{B^2}{(\sqrt{n})^2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 G + \alpha_1\gamma \\ b_2 \frac{B}{\sqrt{n}} + A_1\gamma \end{bmatrix}\}dt$$

$$+ [\Pi_t(\theta^3) - \Pi_t(\theta^2)\hat{\theta}_t - 2\hat{\theta}_t\gamma_t] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ A_1 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} GG' & 0 \\ 0 & \frac{B^2}{(\sqrt{n})^2} \end{bmatrix}^{-1/2} d\nu_t \quad \text{(A-3)}$$

où $\Pi_t(x) \equiv E[x_t|F_t^{\eta,\varepsilon}]$.

Afin d'établir la Proposition, il nous faut montrer que sous l'hypothèse III.1., (i) la solution de l'équation (A-1) est la densité normale et (ii) le système (A-2)−(A-3) est markovien.

Soit $\rho(\theta,\hat{\theta},\gamma) = \frac{1}{\sqrt{\gamma 2\pi}} \exp[-\tfrac{1}{2} \frac{(\theta-\hat{\theta})^2}{\gamma}]$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \Pi_t(\theta^3) &= 3\hat{\theta}_t\Pi_t(\theta^2) - 2\hat{\theta}_t^3 = 3\hat{\theta}_t\Pi_t(\theta^2) - 2\hat{\theta}_t\,[-\gamma_t + \Pi_t(\theta^2)] \\ &= 2\hat{\theta}_t\gamma_t + \hat{\theta}_t\Pi_t(\theta^2) \end{aligned}$$

Il suit que le terme stochastique dans l'équation (A-3) s'annule et que le système (A-2)−(A-3) est un système fermé. Le processus $(\hat{\theta}_t,\gamma_t)$ est donc un processus de diffusion joint. Afin de montrer que $\rho(\theta,\hat{\theta},\gamma)$ satisfait l'équation

(A-1) il faut considérer cette densité comme une fonction de $\hat{\theta}$ et γ. Une application du lemme d'Ito (utilisant les formules (A-1) (A-3)) nous donne alors l'équation différentielle stochastique satisfaite par ρ. Finalement, en utilisant les relations $\rho_\theta = -\rho_{\hat{\theta}}$, $\rho_\gamma = \frac{1}{2}\rho_{\hat{\theta}\hat{\theta}}$ et $\rho_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = \rho_{\theta\theta}$ cette équation différentielle se réduit à l'équation (A-1). Il suit que $\rho(\theta,\hat{\theta},\gamma)$ est une solution de (A-1). Ceci complète la démonstration de la proposition.

Démonstration de la Proposition IV.1.

Soit $x^* \in U$ la stratégie markovienne admissible optimale pour le programme (P-1). D'après la proposition III.1., nous avons l'équivalence entre $F^{\eta,\varepsilon(x^*)}$ et $F^{W(x^*),\,\hat{\theta}(x^*),\gamma(x^*)}$. Il suit immédiatement que

$$V[x^*] = E\int_0^T u[c^*,s]ds = J[x^*]$$

où $V[\cdot]$ et $J[\cdot]$ représentent respectivement les fonctions valeur associées avec (P-1) et (P-2). Soit maintenant x° la politique optimale pour (P-2). Nous avons $J[x^*] \leqq J[x^\circ]$ et par voie de conséquence $V[x^*] \leqq J[x^\circ]$. Sous l'hypothèse de la proposition, nous obtenons également l'inégalité inverse. En effet, si la politique optimale, x°, pour le programme (P-2) est markovienne, x° est une politique admissible pour (P-1), et donc $J[x^\circ] = V[x^\circ] \leqq V[x^*]$. ■

BIBLIOGRAPHIE

ADMATI, A. R. et P. PFLEIDERER, « The Value of Information in Speculative Trading, » Research Paper # 782, Stanford University, 1984.

ARROW, K. J., « The Value of and Demand for Information, » Dans C. B. McGuire et R. Radner, *Decision and Organization,* Amsterdam: North-Holland, Ch. 6, 1972.

BICKEL, P. J. et K. A. DOKSUM, *Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics,* Holden-Day Inc., San Francisco, 1977.

COX, J.C., INGERSOLL, J.E. et S. A. ROSS, « An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices, » *Econometrica* 53, pp. 363-383, 1985.

DANTHINE, J. P. et M. J. P. MAGILL, « Investment in Information Acquisition, » *Economic Letters* 19, pp. 221-225, 1985.

DETEMPLE, J. B., « Asset Pricing in a Production Economy with Incomplete Information, » *Journal of Finance* 41, pp. 383-391, 1986 (a).

DETEMPLE, J. B., « A General Equilibrium Model of Asset Pricing with Partial or Heterogeneous Information, » *Finance* 7, pp. 183-201, 1986 (b).

DIAMOND, D., « Optimal Release of Information by Firms, » *Journal of Finance* 40, pp. 1071-1094, 1985.

DOTHAN, M. U. et D. FELDMAN, « Equilibrium Interest Rates and Multiperiod Bonds in a Partially Observable Economy, » *Journal of Finance* 41, pp. 369-382, 1986.

FELDMAN, D., « The Structure of Interest Rates in a Partially Observable Economy, » GSIA Working Paper #35-85/86, Carnegie-Mellon University, 1986 (a).

FELDMAN, D., « Logarithmic Preferences, Myopic Decisions and Incomplete Information, » GSIA Working Papers #36-85/86, Carnegie-Mellon University, 1986 (b).

FREIXAS, X. et R. E. KIHLSTROM, « Risk Aversion and Information Demand, » Dans M. Boyer et R. E. Kihlstrom ed., *Bayesian Models in Economic Theory*, Elsevier Science Publisher B.V., 1984.

GENNOTTE, G., « Optimal Portfolio Choice under Incomplete Information, » *Journal of Finance* 41, pp. 733-746, 1986.

GIHMAN, I. I. et A. V. SKOROHOD, *Controlled Stochastic Processes*, Springer-Verlag, New York, 1979.

GROSSMAN, S. J., KIHLSTROM, R. E. et L. J. MIRMAN, « A Bayesian Approach to the Production of Information and Learning by Doing, » *Review of Economic Studies* 44, pp. 533-547, 1977.

KIHLSTROM, R. E., « A Bayesian Model of Demand for Information about Product Quality », *International Economic Review* 15, pp. 99-118, 1974.

KIHLSTROM, R. E., « A General Theory of Demand for Information about product Quality, » *Journal of Economic Theory* 8, pp. 413-440, 1974.

KIHLSTROM, R. E., « Firm Demand for Information about Price and Technology, » *Journal of Political Economy* 84, pp. 1335-1341, 1976.

KIHLSTROM, R. E., « A Simple Example of the Radner-Stiglitz Nonconcavity in the Value of Information, » Dans M. Boyer et R. E. Kihlstrom, ed., *Bayesian Models in Economic Theory*, Elsevier Science Publisher B.V., 1984.

KIHLSTROM, R. E., MIRMAN, L. J. et A. POSTLEWAITE, « Experimental Consumption and the Rothschild Effect, » Dans M. Boyer et R. E. Kihlstrom, ed., *Bayesian Models in Economic Theory*, Elsevier Science Publisher B. V., 1984.

LIPTSER, R. S. et A. N. SHIRYAYEV, *Statistics of Random Processes I and II*, Springer-Verlag, New York, 1977.

LOSQ, E. et R. SOBTI, « Demand for Information and Risk Aversion: Some Results in a Portfolio Choice Context, » mimeo, McGill University, 1985.

MERTON, R. C., « Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model, » *Journal of Economic Theory* 3, pp. 373-413, 1971.

MILGROM, P. et R. J. WEBER, « The Value of Information in a Sealed-Bid Auction, » *Journal of Mathematical Economics* 10, pp. 105-114, 1982.

RADNER, R. et J. STIGLITZ, « A Non-Concavity in the Value of Information, » Dans M. Boyer et R. E. Kihlstrom ed., *Bayesian Models in Economic Theory*, Elsevier Science Publishers B. V., 1984.

VERRECCHIA, R. E., « Information Acquisition in a Noisy Rational Expectations Economy, » *Econometrica* 50, pp. 1415-1430, 1982.